Ejercicios Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 77

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

21 de mayo de 2022

1. Calcular el operador $U_I(t,t')$ de forma recursiva.

En este documento, todos los estados y operadores van a asumirse en la imagen de interacción. La ecuación de Schrödinger (77.1) nos dice que

$$i\partial_t U(t,t') = H'(t)U(t,t') \tag{1}$$

Integrando esta ecuación obtenemos la fórmula

$$U(t,t') = 1 - i\int_{t'}^{t} H'(t_1)U(t_1,t')\,\mathrm{d}t_1 \tag{2}$$

Sustituyendo la U dentro de la integral por esta misma ecuación obtenemos

$$\begin{aligned}U(t,t') &= 1 - i\int_{t'}^{t} H'(t_1)\left(1 - i\int_{t'}^{t_1} H'(t_2)U(t_2,t')\,\mathrm{d}t_2\right)\mathrm{d}t_1\\ &= 1 - i\int_{t'}^{t} H'(t_1)\,\mathrm{d}t_1 + (-i)^2\int_{t'}^{t}\int_{t'}^{t_1} H'(t_1)H'(t_2)U(t_2,t')\,\mathrm{d}t_2\,\mathrm{d}t_1\end{aligned}$$

Sustituyendo de nuevo la expresión de U dentro de la integra obtenemos

$$\begin{aligned}U(t,t') =& 1 - i\int_{t'}^{t} H'(t_1)\,\mathrm{d}t_1 + (-i)^2\int_{t'}^{t}\int_{t'}^{t_1} H'(t_1)H'(t_2)\left(1 - i\int_{t'}^{t_2} H'(t_3)U(t_3,t')\,\mathrm{d}t_3\right)\mathrm{d}t_2\,\mathrm{d}t_1\\ =& 1 - i\int_{t'}^{t} H'(t_1)\,\mathrm{d}t_1 + (-i)^2\int_{t'}^{t}\int_{t'}^{t_1} H'(t_1)H'(t_2)\,\mathrm{d}t_2\,\mathrm{d}t_1\\ &+ (-i)^3\int_{t'}^{t}\int_{t'}^{t_1}\int_{t'}^{t_2} H'(t_1)H'(t_2)H'(t_3)U(t_3,t')\,\mathrm{d}t_3\,\mathrm{d}t_2\,\mathrm{d}t_1\end{aligned}$$

En general podemos continuar este procedimiento indefinidamente y obtener la expresión

$$U(t,t') = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{t'}^{t}\int_{t'}^{t_1}\cdots\int_{t'}^{t_{n-1}} H'(t_1)\cdots H'(t_n)\,\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n \tag{3}$$

2. Calcular las energías y estados propios

Sea

$$H = \begin{pmatrix} 100 & 1 \\ 1 & 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & V \\ V & E_2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Para calcular los valores propios, debemos restar un múltiplo de la matriz identidad y calcular el determinante. Pero vamos a definir $\lambda_\pm$ como los dos valores propios y vamos a jugar un poco con las expresiones matemáticas; Intentemos ver si podemos escribir el valor de $\lambda_\pm$ a partir de la suma y el producto de dichos valores. Para empezar podemos escribir

$$\lambda_\pm = \frac{\lambda_+ + \lambda_-}{2} \pm \frac{\lambda_+ - \lambda_-}{2}$$

Por lo que lo hemos escrito en función de la suma y la diferencia, veamos ahora si podemos escribir la diferencia en función de la suma y el producto. En efecto podemos darnos cuenta que si elevamos la diferencia al cuadrado, podemos escribirla de la forma

$$(\lambda_+ - \lambda_-)^2 = \lambda_+^2 + \lambda_-^2 - 2\lambda_+\lambda_- = \lambda_+^2 + \lambda_-^2 + 2\lambda_+\lambda_- - 4\lambda_+\lambda_- = (\lambda_+ + \lambda_-)^2 - 4\lambda_+\lambda_-$$

Por lo que podemos terminar escribiendo la ecuación[1]

$$\lambda_\pm = \frac{\lambda_+ + \lambda_-}{2} \pm \frac{\sqrt{(\lambda_+ + \lambda_-)^2 - 4\lambda_+\lambda_-}}{2} \tag{5}$$

Ahora la pregunta es de que nos sirve esto, a parte de escribir $\lambda_\pm$ de forma muy complicada. Pues resulta que en la base propia del Hamiltoniano, éste tiene la forma

$$H = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} \tag{6}$$

Por lo que la combinación $\lambda_+ + \lambda_-$ no es más que la traza de dicha matriz, mientras que el producto $\lambda_+\lambda_-$ es simplemente el determinante. Pero tanto la traza como el determinante son cantidades invariantes bajo cambios de base! Por lo que los podemos calcular en nuestra base inicial;

$$\lambda_+ + \lambda_- = \mathrm{Tr}\{H\} = E_1 + E_2 = 300, \qquad \lambda_+\lambda_- = |H| = E_1E_2 - V^2 = 19999 \tag{7}$$

Sustituyendo en la ecuación (5)

$$\lambda_\pm = \frac{E_1 + E_2}{2} \pm \frac{\sqrt{(E_1 + E_2)^2 - 4E_1E_2 + 4V^2}}{2} = \frac{E_1 + E_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{E_1 - E_2}{2}\right)^2 + V^2} = 150 \pm \sqrt{2501} \tag{8}$$

Los estados propios simplemente deben cumplir la ecuación

$$E_1x + Vy = \lambda_\pm x \Longrightarrow Vy = (\lambda_\pm - E_1)x \Longrightarrow |\pm\rangle = \frac{\pm 1}{\sqrt{V^2 + (\lambda_\pm - E_1)^2}} \begin{pmatrix} V \\ \lambda_\pm - E_1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + (50 + \sqrt{2501})^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 50 + \sqrt{2501} \end{pmatrix}, \qquad |-\rangle = \frac{-1}{\sqrt{1 + (50 - \sqrt{2501})^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 50 - \sqrt{2501} \end{pmatrix} \tag{10}$$

Donde el -1 en la normalización de $|-\rangle$ es completamente arbitrario y simplemente lo incluyo para que el resultado tenga la misma convención que el resultado que Javier presenta en el capítulo.

[1] Notemos que aquí estamos usando que $\lambda_+ - \lambda_- = \sqrt{(\lambda_+ - \lambda_-)^2}$, lo cual es cierto únicamente si, tal como la notación sugiere, $\lambda_+ \geq \lambda_-$. Si esto no se cumple, entonces debemos multiplicar la raíz por -1.